POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Thm : Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note B_n le polynôme de Bernstein défini par :

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Pour tout $h>0$, on définit $\omega(h)=\sup\{|f(x)-f(y)|,\ |x-y|\leq h,\ x,y\in[0,1]\}$

Alors : 1) La suite des polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CVU vers f sur $[0,1]$

2) Plus précisément, il existe $C>0$ indépendante de f tel que

$$\|f-B_n\|_\infty \leq C\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Cadre : On se place sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a de Bernoulli indépendantes de paramètre $x\in[0,1]$. On note $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. S_n suit une loi binomiale : $Bin(n,x)$.

Démo :

1) • $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\mathbb{P}(S_n=k)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^k=B_n(x)$

• f est continue sur $[0,1]$, donc uniformément continue sur $[0,1]$ (Thm de Heine)

Ainsi pour $\delta>0$ fixé, quand $\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\leq\delta$ on a $\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\leq\omega(\delta)$ $\left(\frac{S_n}{n}\in[0,1]\right)$

De plus on a toujours : $\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\leq 2\|f\|_\infty$

• $|B_n(x)-f(x)|=\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f(x)\right|=\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right)\right|\overset{\text{Jensen}}{\leq}\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\right]$

On note A l'évenement $\left\{\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\leq\delta\right\}$, on a :

$$|B_n(x)-f(x)|\leq\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\right]+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A^c}\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\right]$$

$$\leq\omega(\delta)\,\mathbb{P}(A)+2\|f\|_\infty\,\mathbb{P}(A^c)$$

Or par l'inégalité de Tchebychell on a : $\mathbb{P}(A^c)=\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\delta\right)$

car $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{nx}{n}=x$ $\quad=\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|>\delta\right)\leq\frac{1}{\delta^2}Var\left(\frac{S_n}{n}\right)$

comme $Var\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}var(S_n)=\frac{1}{n^2}x(1-x)n=\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n}$

Ainsi $\mathbb{P}(A^c)\leq\frac{1}{4n\delta^2}$.

De plus, on majore $\mathbb{P}(A)$ par 1, ainsi on obtient :

$\forall x \in [0,1] \quad |f(x) - B_n(x)| \leq \omega(\delta) + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$

d'où $\|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta) + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$

et $0 \leq \limsup_{n\infty} \|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta)$

Comme $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$ on a finalement : $\limsup_{n\infty} \|f - B_n\|_\infty = \lim_{n\infty} \|f - B_n\|_\infty = 0$

Conclusion B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

2) i) Lemme : ω est une fonction croissante sous additive, i.e. $\forall h_1, h_2 \quad \omega(h_1 + h_2) \leq \omega(h_1) + \omega(h_2)$

Démo lemme : Soient $h_1, h_2 > 0$, Soient $x, y \in [0,1]$ tels que $|x - y| \leq h_1 + h_2$

Il existe $z \in [0,1]$ tel que $|x - z| \leq h_1$ et $|z - y| \leq h_2$

Si $h_1 < h_2$: prendre $z = \frac{h_2}{h_1 + h_2} x + \frac{h_1}{h_1 + h_2} y$

Ainsi : $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$

$\leq \omega(h_1) + \omega(h_2)$

D'où en passant au sup : $\omega(h_1 + h_2) \leq \omega(h_1) + \omega(h_2)$

De plus, par récurrence immédiate on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall h > 0 \quad \omega(nh) \leq n\omega(h)$

Ainsi pour h_1, h_2 positifs on a :

$$\omega(h_1 h_2) \leq \omega((1 + \lfloor h_1 \rfloor) h_2) \quad (\text{car } h_1 \leq 1 + \lfloor h_1 \rfloor \text{ et } \omega \nearrow)$$
$$\leq (1 + \lfloor h_1 \rfloor)\omega(h_2)$$
$$\leq (1 + h_1)\omega(h_2).$$

ii) $\forall x \in [0,1] \quad |f(x) - B_n(x)| \leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right]$, par définition de ω on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x - \tfrac{S_n}{n}\right|\right)\right] = \mathbb{E}\left[\omega\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}\left|x - \tfrac{S_n}{n}\right|\right)\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \tfrac{S_n}{n}\right|\right)\omega\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$$
$$\leq \omega\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left[\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \tfrac{S_n}{n}\right|\right)\right]$$

Or $\mathbb{E}\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) = 1 + \sqrt{n}\,\mathbb{E}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)$

$\underset{\text{Hölder}}{\leq} 1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2 \quad$ où $\|X\|_p = \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}$, $p > 0$

Hölder : $\left\|1 \cdot \left(x - \frac{S_n}{n}\right)\right\|_1 \leq \|1\|_2 \left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2$

De plus $\|x-\frac{S_n}{n}\|_2^2 = \mathbb{E}(|x-\frac{S_n}{n}|^2) = x^2 - 2\frac{x}{n}\mathbb{E}(S_n) + \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(S_n^2)$

car $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$$= x^2 - 2x^2 + \frac{1}{n^2}\left[\mathbb{E}(S_n)^2 + Var(S_n)\right]$$

$$= -x^2 + \frac{n^2x^2 + nx(1-x)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

D'où $|f(x) - B_n(x)| \leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1 + \sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right]$

i.e $|f(x) - B_n(x)| \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (majoration indépendante de x)

Conclusion $\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ref : Ouvrard + ZQ